Primetimo još da ako je $\mu(X) < \infty$, tada je uslov konvergencije u meri ekvivalentan sa uslovom da je

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{x \in X : |f_n(x) - f(x)| < \alpha\}) = \mu(X), \quad \text{za svako } \alpha > 0.$$

Primer 9.4. Posmatrajmo prostor $X = [1, \infty)$ sa Borelovom $\sigma-$ algebrom $\mathcal{B}_X$ i Lebegovom merom m. Neka je $f_n = \kappa_{[n,n+1]}$, $n \in \mathbf{N}$. To je niz koji konvergira tačkasto ka $f = 0$, ali ne konvergira u meri ka $f = 0$. Niz iz Primera 9.3 konvergira u meri ka $f = 0$, ali ne konvergira ni u jednoj tački.

Lema 9.1. Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz merljivih funkcija iz $L^p(X)$ koji konvergira u $L^p(X)$ ka f. Tada $f_n \to f$, $n \to \infty$ u meri.

Dokaz: Neka niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u $L^p(X)$ ka f. Neka je $\alpha > 0$. Stavimo

$$E_n(\alpha) = \{x \in X :\mid f_n(x) - f(x) \mid \geq \alpha\}.$$

Važi:

$$\int_X \mid f_n - f \mid^p \, d\mu \geq \int_{E_n(\alpha)} \mid f_n - f \mid^p \, d\mu \geq \alpha^p \mu(E_n(\alpha)) \geq 0,$$

dakle $\mu(E_n(\alpha)) \longrightarrow 0$, kada $n \to \infty$. ∎

Dakle, konvergencija u $L^p(X)$ implicira konvergenciju u meri. Koristeći tu činjenicu i Primer 9.3 zaključujemo da konvergencija u meri ne implicira konvergenciju skoro svuda. Ipak, sledeća teorema pokazuje da konvergencija u meri nekog niza $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ implicira egzistenciju njegovog podniza koji konvergira skoro svuda.

Teorema 9.1. (Risova teorema.) Neka je $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ niz merljivih realnih funkcija koji je Košijev u meri.

i) Postoji podniz $(f_{\nu_n})_{n\in\mathbf{N}}$ koji konvergira skoro svuda i u meri ka merljivoj funkciji f.

ii) Funkcija f je jedinstvena (do na skup mere nula) sa osobinom da niz $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergira u meri ka f.